

Stiften Computeralgebrasysteme Sinn?

Zusammenfassung und Einschätzung der Podiums- und Plenumsdiskussion

Peter Bender, Andreas Schwill
Universität–GH Paderborn – Fachbereich Mathematik–Informatik
D–33095 Paderborn – Germany
email: {bender | schwill}@uni-paderborn.de

„Guter Unterricht wird durch Computeralgebrasysteme noch besser, schlechter Unterricht noch schlechter“. So läßt sich mit den Worten von E. Lehmann das Ergebnis der Podiums- und Plenumsdiskussion (PPD) vom 22.09.1995 mit dem Podium bestehend aus P. Bender (Paderborn; Diskussionsleitung), W. Edelmann (Braunschweig), K. Hasemann (Osnabrück), W. Oberschelp (Aachen) und H.-G. Weigand (Gießen) treffend zusammenfassen.

Die PPD konzentrierte sich vor allem auf eine Frage: Mathematische Begriffe werden von Schülern häufig als sinnleer angesehen. Können Computeralgebrasysteme (CAS) sinnleere Begriffe (wieder?) mit Sinn erfüllen und sie damit für Schüler verständlicher, einsichtiger und begreifbarer machen?

Lehmans Aussage zeigt zum einen, daß aufgrund der vielfältigen und zum Teil diffusen Veränderungen, die CAS im Unterricht auslösen können, zur Zeit kein eindeutiges Votum für oder gegen CAS möglich ist. Hier sind zunächst noch weitergehende Analysen und Konzepte zu entwickeln. Zum anderen unterstreicht die Aussage erneut die besondere Stellung des Lehrers, dessen Fähigkeiten und Kompetenzen mehr als alle technischen Hilfsmittel Voraussetzung für guten Mathematikunterricht sind.

Daneben hat sich die PPD mit einigen Verschiebungen mathematischer und meta-mathematischer Begriffe befaßt, die mit der Anwendung von CAS einhergehen. Insbesondere wurde der traditionelle Begriff der Lösung einer Aufgabe in Frage gestellt.

Zum Begriff des Sinns

Ob mathematische Unterrichtsinhalte von den Schülern als sinnvoll angesehen werden oder nicht, kann viele verschiedene Ursachen haben, – so ein Ergebnis der PPD. Wir werden im folgenden einige Facetten des Sinnbegriffs zusammenstellen – darunter auch die im Plenum diskutierten – und analysieren, inwieweit CAS, bezogen auf den jeweiligen Sinnbegriff, eher zum Stiften oder eher zum Verschleiern von Sinn geeignet sind. Generell konnte die PPD keine Einigung darüber erzielen, ob von CAS a priori sinnstiftende Wirkungen ausgehen, oder ob CAS lediglich medial wirken. Letzteres würde bedeuten,

daß sich ihr Einsatz nur in Gebieten, die selbst schon sinnstiftende Elemente enthalten, in einer konkreten Verbesserung des Unterrichts niederschlagen würde [G. Holland]. Wir werden demgegenüber motivieren, daß CAS durchaus per se sinngebende Beiträge liefern können, allerdings je nach Sinnbegriff mehr oder weniger intensiv.

Angeregt durch Beiträge aus der PPD identifizieren wir – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – eine Reihe von Sinnbegriffen, die alle zwischen zwei ausgeprägten Polen angesiedelt sind: Das eine Extremum erfaßt die naive subjektive Sinngebung durch die Schüler, die sich in einem flapsigen Ausdruck wie „das macht (doch keinen) Sinn“ o.ä. äußert. – Auf der anderen Seite befindet sich ein gewissermaßen objektivierter, gegenstandsbezogener Sinn, der durch die begriffliche Erfassung eines Gegenstands und seine Einbettung in den mathematischen Begriffsraum vermöge eines begrifflichen Netzes, durch seinen Bezug zu anderen Begriffen, durch seine historische Genese, durch sein Wirkungsspektrum und seinen (innermathematischen) Anwendungsbereich entsteht.

In Anlehnung an das informatische Begriffspaar der *intensionalen* und *extensionalen* Bedeutung einer Rechenvorschrift könnte man hier von einer *intensionalen* (beim Subjekt, dem Schüler) und *extensionalen* (beim Objekt, dem Stoff) *Bedeutung von Sinn* reden.

Einerseits stehen intensionale und extensionale Sinnstiftung immer wieder in engem Zusammenhang, etwa wenn es um die Konkretisierung, Veranschaulichung von mathematischen Gegenständen und deren lebensweltlichen Bezug geht. – Andererseits bleiben diese beiden Formen im schulischen Unterricht faktisch oft voneinander abgeschottet. Zum Beispiel muß (intensionaler) Sinn durch Erfolg und Spaß beim mathematischen Arbeiten nicht unbedingt etwas mit dem (extensionalen) Sinn zu tun haben, den Mathematiker, Didaktiker und Lehrer im jeweiligen Stoff erkennen. H. Hischer: „Schüler können Sinn in etwas sehen, was wir Mathematiker für völlig sinnlos erachten“ (und umgekehrt).

In einem idealen Mathematikcurriculum wird die zunächst überwiegend intensional geprägte Sinnsuche der Schüler zunehmend extensional angereichert. Die Aufgabe des Lehrers (und der Didaktik) besteht dabei vor allem darin, anfangs extensionalen Sinn in intensionalen umzumünzen, bis die extensionale Sinnstiftung mehr und mehr selbständig für den Lernfortschritt tragfähig wird.

Sinnstiftung durch CAS

Von besonderem Interesse ist nun die Frage, inwieweit CAS diesen Prozeß unterstützen, also mathematische Gegenstände intensional mit Sinn erfüllen und im Laufe des Curriculums die extensionale Sinnstiftung in den Vordergrund rücken (dieser Prozeß bezieht sich nicht nur das globale Curriculum, sondern prinzipiell auf jede Unterrichtseinheit).

Zur Beantwortung dieser Frage erweist sich die Unterscheidung von mehreren Sinnklassen als nützlich. Die Auflistung beginnen wir mit stärker intensional geprägten Klassen; die später genannten sind zunehmend mit extensionalem Gehalt angereichert.

(1) **Sinn durch Wohlbehagen** [P. Bender, H. Heugl, H. Hischer, W. Oberschelp]

Das Arbeiten mit Computern macht Kindern allgemein großen Spaß, und Spaß ist häufig sowohl Voraussetzung, als auch Ergebnis von Erfolg. Dieser profane Aspekt von Lernen, der im Schulalltag und erst recht im Mathematikunterricht oft vernachlässigt wird, kann zumindest in gewissem Umfang mit CAS gefördert werden.

Andererseits [W. Buhmann], so ein Ergebnis von Modellversuchen, kann sich dieser Vorteil recht schnell ins Gegenteil verkehren und die Freude an der Arbeit sowie die Sinnstiftung reduzieren, wenn die Einführung in die Bedienung des CAS zu viel Unterrichtszeit in Anspruch nimmt, bevor konkrete Probleme bearbeitet werden können. Durch geeignete didaktische Maßnahmen (für die allerdings noch kaum gute Vorbilder existieren) muß diese jeweilige Durststrecke 'entschärft' bzw. – noch besser – positiv gewendet werden. Allerdings kann man auch davon ausgehen, daß CAS unabhängig von didaktischen Belangen noch erheblich bedienungsfreundlicher werden.

(2) **Sinn durch Kompetenzerweiterung** [K. Tschacher]

Im traditionellen Unterricht ist die mathematische Kompetenz vor allem beim Lehrer gebündelt: Er übernimmt die Verantwortung für die Aktivitäten der Schüler, kontrolliert und bewertet ihre Lösungen und liefert zugleich deren Interpretation.

Nun ergibt sich für Schüler durch den Einsatz von CAS eine Kompetenzerweiterung verbunden mit der Übernahme von zusätzlicher Verantwortung und weitergehenden Freiheiten. Die Schüler erhalten jetzt die Gelegenheit, ihr Handeln und ihre Lösungsvorschläge im Dialog mit dem CAS selbständig zu überprüfen und in eigener Verantwortung zu bewerten, wodurch sie dem Lehrer einen Teil seines Wissensmonopols für Mathematik streitig machen.

Desweiteren vergrößert sich die Kompetenz durch das Erwerben neuer Fähigkeiten im Zusammenhang mit der Interpretation von Ausgaben und Lösungen, die das CAS liefert. Nicht mehr nur die Ermittlung der Lösung ist das zentrale Lernziel – diese Tätigkeit reduziert sich mit CAS oft zur Trivialität –, sondern vielmehr Analyse und Bewertung der Lösung und gegebenenfalls ihre Einordnung in einen übergeordneten Zusammenhang (s. auch unsere Ausführungen zum Lösungsbegriff weiter unten).

(3) **Sinn durch lebensweltliche Bedeutung** [H. Appel, P. Bender, W. Oberschelp, A. Wynands]

Mathematische Gegenstände verfügen über eine lebensweltliche Bedeutung, wenn sie Bezüge zu Sprache und Denken des Alltags besitzen, wenn sie sich durch vortheoretische, vorwissenschaftliche Überlegungen erschließen lassen, wenn sie zwischen „mathematischer und außermathematischer Kultur vermitteln“ [H.-W. Heymann]. Lebensweltlicher Sinn entsteht z.B. auch durch das Aufgreifen *echter* Anwendungsprobleme mit Alltagsbezug, ihre Mathematisierung und anschließende Lösung. Unglücklicherweise sind viele

Umweltprobleme für den traditionellen Mathematikunterricht wenig geeignet, weil sie auf sehr große Datenmengen führen, die dann rechnerisch bewältigt werden müssen, wobei sich für die Schüler die Sinnfrage erneut stellt, wenn hierzu nicht die vorhandenen leistungsfähigen Werkzeuge verwendet werden. Beispielhaft sei hier die Berechnung von Transport- und Optimierungsproblemen genannt, die oft auf sehr große, wenn auch dünnbesetzte, Matrizen führen.

Auf diesem Feld können CAS erhebliche Unterstützung bieten, indem sie die Probleme rechnerisch zugänglich machen und zugleich offenbaren, in welchem großem Umfang mathematisches Knowhow in ingenieurmäßig erstellten Produkten unsichtbar eingeflossen ist, z.B. in Motoren, Fahrrädern, Verpackungen u.v.a. Sie stiften hier also keinen Sinn per se, ermöglichen aber, daß Anwendungen aufgegriffen werden können, die dann ihrerseits sinnstiftend sind, und sie motivieren, daß mathematische Kenntnisse in unserer heutigen technischen Welt unverzichtbar sind.

(4) **Sinn durch Konkretisierung und Visualisierung von abstrakten Begriffen** [P. Bender]

Viele mathematische Begriffe lassen sich durch ein Tafelbild nur unzureichend veranschaulichen, vor allem jene, die sich aus Parameteränderungen ergeben, z.B. Folgen und Grenzwerte, Differenzenquotienten, Kurvenscharen. Erst durch das schnelle Errechnen einer Graphik für unterschiedliche Parameter mit CAS, durch die eine primitive Form von Bewegtbild entstehen kann, lassen sich die erwähnten Prozesse graphisch und rechnerisch veranschaulichen.

(5) **Sinn durch enaktives Arbeiten** [H. Hischer]

Berücksichtigt man ältere Vorschläge, etwa von Bruner zur Wahl stufenadäquater Repräsentationen von Unterrichtsinhalten, so sollte Unterricht immer auch, vor allem in frühen Phasen, *enaktive*, also handlungsbezogene Elemente betonen. (Als 'frühe Phase' ist hierbei unter Berücksichtigung des psychogenetischen Grundgesetzes sowohl die frühe entwicklungspsychologische, als auch die frühe kognitive Phase beim generellen Einstieg in ein neues Gebiet aufzufassen.) Erst wenn auf dieser Stufe entsprechende Fortschritte erzielt wurden, kann man zu anspruchsvolleren Repräsentationen, wie der *ikonischen* (bildhaften) oder noch später *symbolischen* (formalsprachlichen) Ebene übergehen.

In der Mathematik dominieren bekanntlich auf jeder Stufe symbolische Darstellungen, und die für den Unterricht so wichtigen enaktiven Anteile müssen meistens in einem bewußten und anstrengenden didaktischen Akt (in der Regel: des Lehrers) an die Oberfläche geholt werden. Hierfür könnten CAS, vor allem in Verbindung mit dem in (6) genannten experimentellen Arbeiten, erhebliche Unterstützung leisten. Damit würde der Hang des traditionellen Mathematikunterrichts zur übermäßigen Versprachlichung mit Definitionen, Kalkülen bzw. Formeln relativiert. Allerdings darf nicht verkannt werden, daß sich die Handlungen im Zusammenhang mit CAS bereits auf einer stark ikonisierten Ebene ab-

spielen.

(6) Sinn durch experimentelles Arbeiten [K. Tschacher]

CAS können den Mathematikunterricht um eine experimentelle Komponente anreichern, die in höherem Maße als bisher auch freies Arbeiten unterstützt (allerdings auch die Gefahr sinnlosen Agierens birgt). Das mathematische 'Wissen', das in CAS integriert ist, wird dabei als in sich abgeschlossene konsistente virtuelle Welt aufgefaßt, in der gewisse Gesetze gelten. Aufgabe des Mathematikunterrichts ist dann die Entschlüsselung dieser Welt, die Beobachtung gewisser Vorgänge durch den Schüler als Außenstehenden, die Ermittlung der beteiligten Objekte, ihrer Eigenschaften sowie der Gesetze, denen sie unterliegen. Dies erinnert an typische Vorgehensweisen im klassischen naturwissenschaftlichen Unterricht, bei der das Experiment Ausgangspunkt für die Gewinnung von Erkenntnissen bzw. allgemein für den Unterricht ist.

Beispiel [nach K. Tschacher] für die Verwendung eines CAS zum Experimentieren, und zwar zum Thema *Bruchaddition*: Die Versuchsanordnung besteht aus der Eingabe gewisser Terme in das CAS und aus dem Erfassen der Ausgabe. Auf die Eingabe $a/b+c/d$ liefert das CAS die Ausgabe $(ad+bc)/bd$ und behauptet, beide Terme seien gleich (im Sinne von 'gleichwertig'). Dieses Ergebnis ist zu analysieren: Entspricht es den bisher gewonnenen Gesetzmäßigkeiten? Welches mathematische Gesetz verbirgt sich hinter dieser Identität? Hier sind möglicherweise feinere Beobachtungen der 'atomaren' Abläufe der virtuellen Welt des CAS erforderlich, z.B. durch Experimente gleicher Versuchsanordnung, bei denen einmal im Anfangsterm der erste Summand mit d und der zweite mit b erweitert und dann der Term $ad/bd+bc/bd$ eingegeben, ein anderes Mal im Anfangsterm $b=d$ gesetzt und dann der Term $a/b+c/b$ eingegeben wird. So entstehen unterschiedliche Gesetze für einzelne Teilbereiche, die später zu einem allgemeinen Gesetz erweitert und gegebenenfalls 'empirisch' in der virtuellen Welt überprüft werden können.

Auch dieses Talent von CAS ist mit erheblichen epistemologischen Gefahren verbunden: Es suggeriert nämlich, mathematische und naturwissenschaftliche Methoden des Erkenntniserwerbs seien zu identifizieren, was hier bedeutet, den deduktiven Charakter des Mathematiktreibens zu verschütten und durch einen (falschen) induktiven Charakter zu ersetzen. Darüber hinaus könnten – was Ergebnisse empirischer Untersuchungen nahelegen – Schüler den Computer und das CAS verabsolutieren, die virtuelle Welt für die reale halten, dabei besonders das Bewußtsein dafür verlieren, daß CAS von menschlichen Programmierern prinzipiell willkürlich programmiert wurden. Dazu müßte – und es ist Skepsis angebracht, ob dies insgesamt gelingt – die Rolle des CAS in den Augen der Schüler auf die eines Lieferanten von Beispielen, Mustern, Ideen zurückgeführt werden, wobei stets zu berücksichtigen ist, daß die Wahrheit mathematischer Sätze u.ä. nicht aus einer großen Anzahl von verifizierenden Beispielen folgt.

(7) Sinn durch Einbettung in ein begriffliches Netz [P. Bender]

Ausubel unterscheidet in seiner Konzeption zwischen dem bloßen Auswendiglernen (rote learning) von Sachverhalten und dem bedeutungsvollen Lernen (meaningful learning). Während Wissen im ersten Fall unstrukturiert und unverbunden im Gedächtnis gespeichert ist, wird bedeutungsvolles Lernmaterial kognitiv aufeinander bezogen, sowie hierarchisch organisiert und strukturiert, wobei die verschiedenen Wissensselemente über Ähnlichkeits- sowie Über- und Unterordnungsrelationen miteinander und mit relevanten bereits verfügbaren Konzepten (Ankerideen, Ankerkonzepte, Ankerprinzipien usw.; anchoring ideas) verknüpft werden. Die Wirksamkeit sinnvollen Lernens hängt nun entscheidend davon ab, ob der Lehrer adäquate Kenntnisse über die kognitive Struktur der Lernenden besitzt und ob er den Lernprozeß so steuern kann, daß das neue Wissen unter die 'richtigen' Ankerideen subsumiert wird.

Der sinngabende Beitrag von CAS scheint in dieser Sinnklasse eher gering zu sein. Er beschränkt sich hier wohl auf die Erschließung solcher Lernmaterialien, in denen das Zusammenwirken unterschiedlicher mathematischer Konzepte, die zunächst noch isoliert voneinander im Gedächtnis gespeichert sind, sichtbar wird und dem Schüler die Gelegenheit gibt, das Gelernte assoziativ gedanklich zu verknüpfen und zu strukturieren oder die bereits bestehende kognitive Struktur zu verstärken. Als Beispiel sei die Berechnung von Splines genannt, wobei die Begriffe Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Ableitung integriert werden.

(8) Sinn durch innermathematische Anwendung [P. Bender]

Bereits die Sinnklasse (7) (Einbettung in ein begriffliches Netz) ist nicht nur eine kognitive (intensionale) Kategorie, sondern hat schon einen ausgeprägt gegenstandsbezogenen (extensionalen) Charakter. Sie dient geradezu als Scharnier, an dem die beiden Sinn-Kategorien aufeinander bezogen werden (können). – Ähnlich ist auch die Sinnklasse (8) strukturiert, die wir hier wegen ihres noch stärkeren extensionalen Wesens gesondert aufführen:

Nicht nur durch das Aufgreifen von Anwendungsproblemen mit lebensweltlichem Charakter, sondern auch durch innermathematische Anwendungen lassen sich sinnstiftende Bezüge herstellen. Auch hier besteht der Nutzen von CAS im wesentlichen im Erschließen neuer sinnhaltiger Themen für den Unterricht, die bisher aufgrund des erforderlichen Daten- und Rechenaufwands nicht durchführbar waren. Als Beispiele seien erneut die Berechnung von Splines genannt, oder allgemein Approximationsverfahren, die wegen des hohen Rechenaufwands erst mit CAS möglich sind.

(9) Sinn durch historische Genese

Einen Beitrag von CAS zur Sinnstiftung von mathematischen Gegenständen durch historische Genese konnte die PPD nicht erkennen. Vielmehr wurde gar die Gefahr des Sinn-

verlustes gesehen [G. Schmidt], weil traditionelle historisch-genetische sinnstiftende Zugänge nun möglicherweise entwertet werden. Als Beispiel führte die PPD den Zugang zu Gleichungen an. Während es beachtliche historische Gründe, z.B. Rechenverfahren und -aufwand, Lösbarkeit, Lösungsmenge usw., für die Klassifizierung von Gleichungen in unterschiedliche Gleichungstypen gibt, z.B. in lineare, quadratische, nicht-lineare, funktionale Gleichungen usw., wird diese Typisierung durch CAS weitgehend egalisiert. Hier gibt es nur noch einen Typ 'Gleichung', weil das CAS jede Gleichung aus Benutzersicht auf einheitliche Weise löst und nicht mehr erkennbar ist, daß den einzelnen Gleichungstypen unterschiedliche mathematische Theorien und Lösungsverfahren zugrundeliegen.

Fazit: Es deutet sich an, daß CAS ihre Wirkung vor allem im intensionalen Bereich entfalten. Innermathematisch liefern sie lediglich in geringerem Ausmaß sinnstiftende Bezüge. Interessanterweise impliziert dieses Ergebnis zugleich, daß klassische mathematische Inhalte und Vorgehensweisen durch CAS nicht entwertet, aber auch kaum mittels zusätzlicher sinngebender Elemente aufgewertet werden. So behalten z.B. Lösungen und Darstellungen, die mit klassischen Methoden gewonnen wurden, weiterhin ihren Wert und ihre Berechtigung im Mathematikunterricht, auch wenn sie prinzipiell genauso oder schneller durch CAS ermittelt werden können. Hierzu W. Herget: „Lineare und quadratische Gleichungen würde ich genauso behandeln wie bisher.“

Begriffsverschiebung durch CAS

Durch den Einsatz von CAS treten diverse mehr oder weniger ausgeprägte Bedeutungsverschiebungen mathematischer Begriffe auf, die ebenfalls erst noch genauer hinsichtlich ihrer Relevanz und ihrer unterrichtlichen Auswirkungen hinterfragt werden müssen. Die wohl weitreichendste Verschiebung beobachtete die PPD beim Begriff der *Lösung eines Problems* [H. Heugl, H. Hischer, H. Körner].

Das übliche Verfahren der Schulmathematik zur Ermittlung 'der' Lösung zu einem Problem, insbesondere aus den Anwendungen, läßt sich vereinfacht wie in Abb. 1 veranschaulichen.

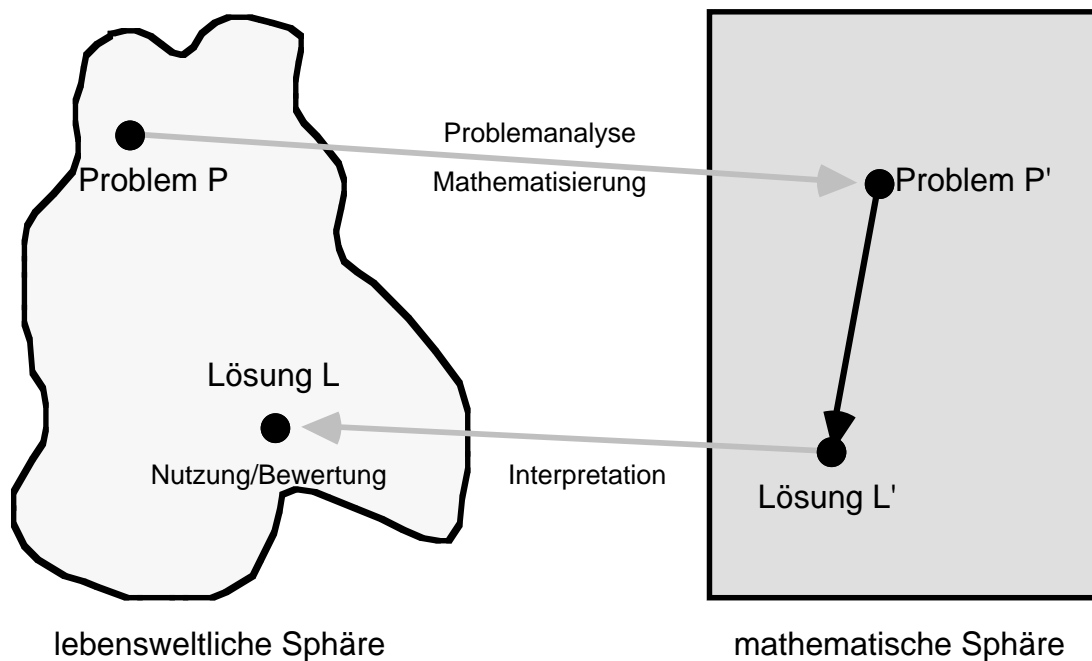


Abb. 1: Vom (Anwendungs-) Problem zur Lösung

Bisher dominiert in der Schule die Behandlung und Einübung des 2. Schritts von einem mathematischen Problem P' zu einer Lösung L' . Allein schon durch die Wahl der Übungsaufgaben, die meist nur einen geringen lebensweltlichen Bezug besitzen (sog. toy problems), spielen die beiden anderen Schritte im Zusammenhang mit der Einbettung von Problem und Lösung in die Umwelt nur eine untergeordnete Rolle. Zwar hat die anwendungsorientierte Richtung der herkömmlichen Mathematikdidaktik 'schon immer' die Bedeutung des *ganzen* Schemas in Abb. 1 betont. Unbeeindruckt von diesen Ansätzen ist im realen Mathematikunterricht mit 'Lösung' nach wie vor durchweg Lösung L' in Abb. 1 sowie der Weg von P' zu L' gemeint. Diese beiden Elemente werden nun durch CAS aber weitgehend trivialisiert. CAS unterstützen so die bekannten Forderungen der Didaktik des anwendungsorientierten Mathematikunterrichts und *erzwingen* vermutlich sogar deren stärkere Beachtung: Der Begriff der Lösung muß im Unterricht zukünftig verstärkt den Weg von P zu P' , d.h. die mathematische Modellierung, den Weg von L' zu L , d.h. die Interpretation der Lösung L' in ihrem lebensweltlichen Bezug, und L selbst, insbesondere ihre Nutzung und Bewertung, umfassen. Folglich sind die Probleme in Übungen und Klausuren demnächst stärker aus dem lebensweltlichen Raum zu entnehmen.

Die Kompetenz der Schüler muß sich beim Einsatz von CAS also weg von kalkülhaftem Arbeiten hin zum Erfassen mathematisierbarer Aspekte eines Problems und zum Interpretieren, Nutzen und Bewerten mathematischer Lösungen verschieben (was keineswegs eine Erleichterung darstellen muß). Zugleich haben die Schüler zu lernen, daß es zu einem Problem oft eine Vielzahl unterschiedlicher mathematischer Modellierungen, Lösun-

gen und Interpretationen gibt, – eine ganz neue und wertvolle Erfahrung gegenüber dem traditionellen Mathematikunterricht, wo ja häufig die Modellierung vorgegeben bzw. im Prinzip klar ist. – Nach wenigen Schülergenerationen müßten sich aber die Schwierigkeiten, die in der Umstellung als solcher bestehen, für die Schüler auf natürliche Weise von selbst erledigt haben. Dauerhafte Probleme werden sich eher auf Seiten der Lehrer auftun, weil die meisten ihre Unterrichtskonzepte erheblich verändern müßten.

Schlußbemerkungen

Unsere Analyse des Sinnbegriffs hat gezeigt, daß CAS gewichtige Beiträge zur intensionalen Sinnstiftung leisten können, weil sie das *subjektive* Bild der Mathematik aufhellen und die Haltungen und Einstellungen der Schüler zur Mathematik verbessern können, indem sie stärker lebensweltliche Aspekte erschließen, andere, mehr experimentelle Arbeitsformen betonen, die Kompetenzen der Schüler erweitern helfen oder ganz einfach Spaß bringen.

Die PPD hat nicht klären können, ob die Verwendung von CAS auch das *objektive* Bild der Mathematik und des Mathematikunterrichts grundlegend ändert oder ob nur eher randständige Modifikationen eintreten. Die Erwartung von erheblichen Begriffsverschiebungen, allein z.B. des Lösungsbegriffs, stützt erstere, die relativ geringen Beiträge zur extensionalen Sinnstiftung eher letztere Vermutung.

In jedem Fall ist vor einer kurzfristigen flächendeckenden Einbindung von CAS zu warnen, ehe nicht die Auswirkungen hinreichend intensiv studiert worden sind. Wirkungsvoll erscheint vorerst die schrittweise Einführung, Erprobung und Rückkopplung der Ergebnisse nach einem Modell, das auf eine neuzeitliche im Zusammenhang mit lean management oft genannte, ursprünglich japanische Managementmethode zurückgeht: *Kaizen*, d.h. die kontinuierliche Beobachtung und selbstorganisierte Verbesserung der Lehr- und Lernprozesse, sowohl mikroskopisch auf der unmittelbaren Unterrichtsebene, mesoskopisch im gesamten Mathematikcurriculum, als auch makroskopisch durch permanente Rückkopplung der einzelnen Erkenntnisse auf die Ebene von Gesellschaft einschließlich Schulverwaltung und von dort schulübergreifend zurück in den Unterricht.