Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik

Andreas Schwill
Fachbereich Mathematik/Informatik - Universität Paderborn
D-33095 Paderborn - Germany
email: schwill@uni-paderborn.de

Zusammenfassung: Soll und kann der Informatikunterricht im Mathematikunterricht aufgehen? Dieser Frage soll in diesem Aufsatz nachgegangen werden. Zunächst werden wir im ersten Teil durch Vergleich der fundamentalen Ideen, die nach Ansicht von J.S. Bruner ein Fach sowohl wissenschaftlich als auch erkenntnistheoretisch strukturieren, erhebliche Unterschiede zwischen Mathematik und Informatik aufzeigen. In einem weiteren Teil werden wir dieses überraschende Ergebnis weiter ausführen und versuchen zu begründen, warum die Informatik und eine ihrer historischen Wurzeln, die Mathematik, nur noch wenige Gemeinsamkeiten besitzen, warum aber dennoch immer wieder versucht wird, Methoden der Mathematik und Methoden der Informatik zu identifizieren. Ansatzpunkte dieser Begründung werden einerseits die unterschiedlichen Sprachniveaus (Objekt- und Metasprache) sein, auf denen Ideen in Mathematik und Informatik verwendet werden, andererseits die Methoden der Modellbildung in beiden Fächern.

1 Einleitung

Seit Einführung der Informatik in den regulären Fächerkanon der Schule werden regelmäßig Vergleiche zwischen Mathematik und Informatik mit dem Ziel gezogen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Mathematik und Informatik zu erarbeiten und zu ermitteln, inwieweit informatische Inhalte von der Mathematik mitabgedeckt oder in ihr angesiedelt werden können. Je nach Blickwinkel fallen die Ergebnisse recht kontrovers aus:

- Mal werden der Informatik zwar allgemeinbildende Inhalte zugestanden, diese - wobei es sich meist um Inhalte algorithmenorientierter Art handelt - seien aber zu gering, um ein eigenes Schulfach zu rechtfertigen. Vielmehr könnten sie wegen ihrer formalen Hintergründe besser in den Mathematikunterricht einbezogen werden.
- Auf der anderen Seite wird die Informatik als Fach mit neuartigen allgemeinbildenden Zielen und Inhalten angesehen, die bisher von keinem anderen Fach vermittelt werden und auch von keinem anderen Fach - ohne daß dies selbst einen Großteil seiner eigenen Identität verliert - angemessen vertreten werden können. Anhänger dieser Ansicht setzen sich daher meist zugleich auch für einen verpflichtenden Informatikunterricht (nicht ITG) in Sekundarstufe I oder II ein.

Als Repräsentanten dieser konträren Sichtweisen seien exemplarisch [B80] und [C77] genannt.

Wir wollen in diesem Aufsatz analysieren, ob die Gemeinsamkeiten von Mathematik und Informatik, so wie sich die Fächer zur Zeit in der Schule darstellen, eine Aufnahme der Informatik in den Mathematikunterricht nahelegen oder nicht.

In Abschnitt 2 und 3 konzentrieren wir uns auf die Inhalte von Mathematik und Informatik aus ideenorientierter Sicht: In den letzten Jahren hat in beiden Fächern ein didaktisches

Konzept wieder zunehmend an Aufmerksamkeit gewonnen, das schon in den 60er Jahren zu vielversprechenden Ansätzen geführt hat: die Vermittlung von Inhalten in Form fundamentaler Ideen gemäß [B60]. Da nach Ansicht von Bruner die fundamentalen Ideen ein Fach sowohl wissenschaftlich als auch erkenntnistheoretisch strukturieren, liegt es nahe, die Ideen beider Fächer Mathematik und Informatik zum Vergleich heranzuziehen, um Hinweise auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu erhalten. Insbesondere wird dieser Vergleich Erkenntnisse darüber liefern, ob sich die fundamentalen Ideen der Informatik den fundamentalen Ideen der Mathematik unterordnen, wenn die Informatik in der Mathematik aufgehen soll.
In Abschnitt 4 vertiefen wir ausgewählte Aspekts dieses Vergleichs, die Sprachniveaus, auf denen die Ideen wirken, und die Modellbildung.

2 Fundamentale Ideen der Mathematik

Versucht man einen Überblick über die fundamentalen Ideen der Mathematik zu gewinnen, so findet man eine zwiespältige Situation vor: Einerseits sind die Ideenvorschläge, die bisher für die Mathematik als Ganzes vorgeschlagen wurden, noch recht divergent und auf so hohem Niveau, daß sie didaktisch wenig brauchbar erscheinen, weil sie alles und damit nichts erfassen. Andererseits sind viele Teilgebiete der Mathematik durch fundamentale Ideen recht überzeugend erschlossen, wobei jedoch die Verwendung des Begriffs „Idee“ nicht immer einheitlich ist.
Dies liegt zum einen sicher an den wenigen Versuchen, den Begriff der fundamentalen Ideen durch nachprüfbare Kriterien zu präzisieren. Zum anderen scheint die Mathematik, anders als die Informatik (s.u.), kein für alle ihre Teilgebiete gemeinsames und hinreichend konkretes Forschungsziel oder Tätigkeitsmodell zu besitzen, zu dessen Erreichen bzw. zu dessen Weiterentwicklung alle Ideen beitragen, und das folglich als Ausgangspunkt für die Suche nach Ideen dienen kann. Vielmehr liegen den Aktivitäten innerhalb der Teilgebiete jeweils eigenständige und voneinander unabhängige Ziele zugrunde. In der Informatik liegen die Verhältnisse anders: Hier sind es die Methoden der Softwareentwicklung, zu deren Erforschung und Weiterentwicklung direkt oder indirekt alle Teilgebiete beitragen.

Den wohl überzeugendsten Katalog fundamentaler Ideen hat Schreiber [S83] entwickelt. Er definiert eine fundamentale Idee vorläufig durch folgende Eigenschaften:
- *Weite*, d.h. logische Allgemeinheit.
- *Fülle*, d.h. vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz.
- *Sinn*, d.h. Verankerung im Alltagsdenken, lebensweltliche Bedeutung.

Aufbauend auf dieser Definition ermittelt er dann die fundamentalen Ideen der Mathematik, die er gem. Abb. 1 in drei Gruppen einteilt.

Prozeduren	Eigenschaften	Begriffsbildungsprozesse
Exhaustion	Quantität	Ideation
Iteration	Kontinuität	Abstraktion
Reduktion	Optimalität	Repräsentation
Abbildung	Invarianz	Raum
Algorithmus	Unendlich	Einheit

Abb. 1: Fundamentale Ideen der Mathematik nach Schreiber

Darüber hinaus liegen für eine Reihe von Teilgebieten der Mathematik umfangreiche Ideensammlungen vor [F76,H81,H75,K81,M80,S82,T79], deren Zusammenhänge untereinander und mit Schreiber's Ideen bisher jedoch noch nicht hinreichend aufgedeckt wurden. In Abb. 2 ist eine Auswahl dieser Ideen kommentarlos und unstrukturiert zusammengestellt.

Abschätzung	Extrapolation	Messen
Approximation	Geometrisierung	Minorisierung
Beziehung von	Homogenität	Ordnung
Modell und Realität		Passen
Bifurkation	Homomorphie	Problemlösen durch
Differentiation	Intuition	Standpunktwechsel
Diskretisierung	Invarianz	Stabilität
Dualismus	Kraft des Formalen	starrer Körper
Einfachheit von Strukturen	Linearität	Stetigkeit
Erweiterndes Umdefinieren	Majorisierung	Struktur
Exaktifizieren	mathem. Modellieren	Symmetrie
	Mathematisierung	Verallgemeinerung
	umgangssprachl. Begriffe	Zahl

Abb. 2: Auswahl fundamentaler Ideen von Teilgebieten der Mathematik

3 Fundamentale Ideen der Informatik

Alle fundamentalen Ideen, die bisher für die Informatik genannt wurden [D84,G91,K89,S93], zentrieren sich um einen gemeinsamen Kern, so daß hier im Unterschied zur Mathematik von einer gewissen Stabilisierung der Ideenkollektion ausgegangen werden kann.

Der neueste Katalog stammt von Schwill [S93]. Ausgangspunkt war eine Präzisierung des Ideenbegriffs durch folgende Definition:

> Eine *fundamentale Idee* bezgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das

(1) in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (*Horizontalkriterium*),

(2) auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (*Vertikalkriterium*),

(3) in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (*Zeitkriterium*),

(4) einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (*Sinnkriterium*).

Unter Ausnutzung dieser Definition und durch Analyse der Aktivitäten innerhalb des Software life cycle, einem Vorgehensmodell der Informatik, in dem alle anderen Methoden der Informatik direkt oder indirekt zusammenlaufen, und durch Abgleichung der dabei auftretenden Ideen mit Aktivitäten in anderen Teilgebieten der Informatik ist ein umfangreicher Ideenkatalog entstanden (Abb. 3). Die hierarchische Anordnung läßt Relevanz, Wirkungsbereich und Verflechtung jeder Idee sichtbar werden.

Algorithmisierung

- ***Entwurfsparadigmen***
  - Branch and Bound
  - Divide and Conquer
  - Greedy-Methode
  - Backtracking
- ***Programmierkonzepte***
  - Konkatenation (Sequenz, Feld, Verbund)
  - Alternative (if, case, var. Verbund)
  - Iteration (while, Liste, File, Keller, Schlange)
  - Rekursion (rek. Prozedur, Baum, Suchbaum)
  - Nichtdeterminismus
  - Parametrisierung
  - Parallelisierung
- ***Ablauf***
  - Prozeß
  - Prozessor
- ***Evaluation***
  - **Korrektheit**
    - part. Korrektheit
    - Terminierung
    - Konsistenz
    - Vollständigkeit
    - Fairneß
  - **Komplexität**
    - Reduktion
    - Diagonalisierung
    - Ordnung
    - unit-cost Maß
    - log-cost Maß
    - worst/average/ amortized case

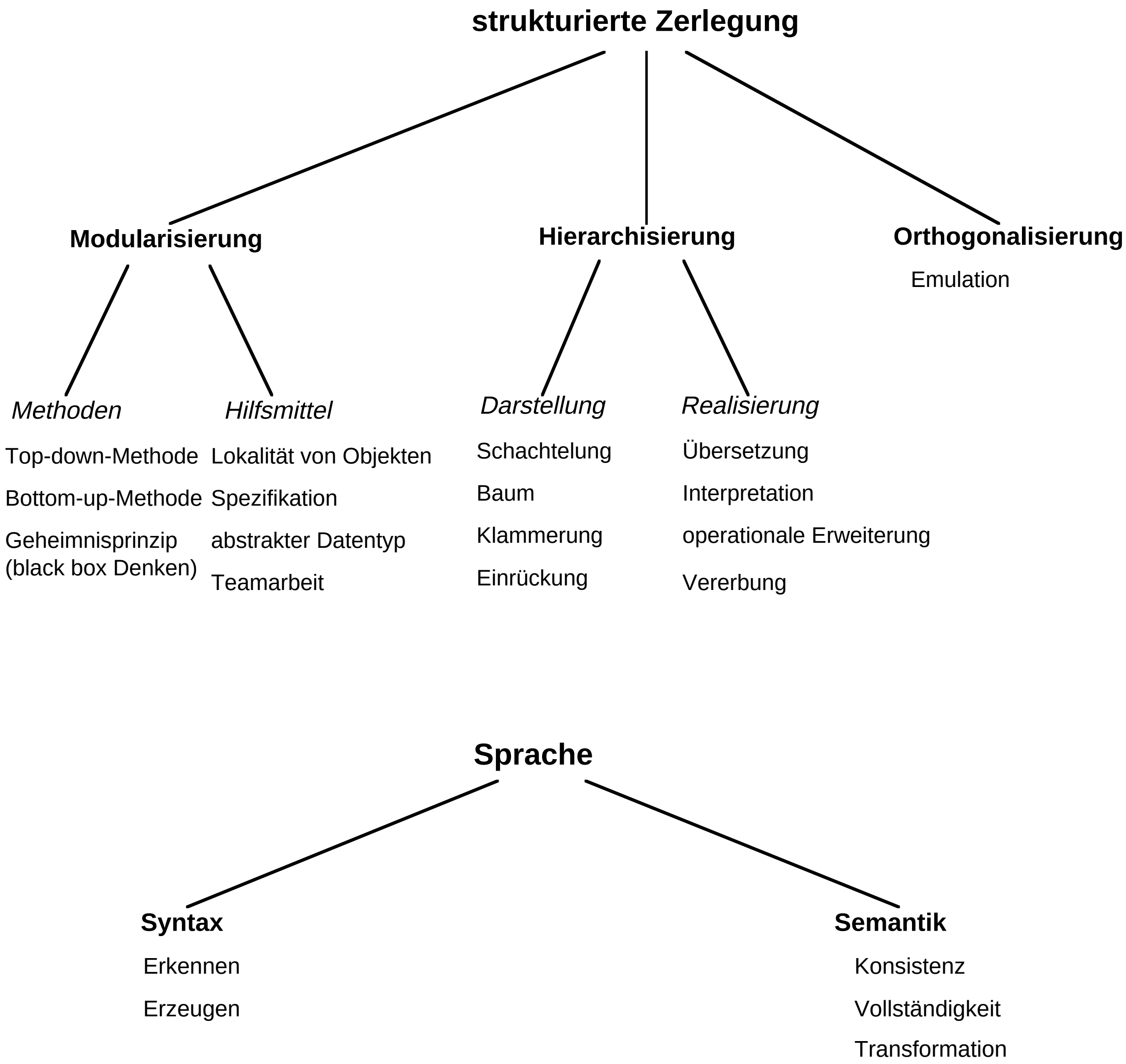

Abb. 3: Fundamentale Ideen der Informatik

Die drei Wurzeln (*Masterideen*) dieses Ideenspektrums Algorithmisierung, strukturierte Zerlegung und Sprache lassen sich somit als tragende Säulen der Informatik auffassen. Sie stützen zugleich eine Sichtweise der Informatik, die bei Versuchen, ihr Wesen zu klären, häufig betont (z.B. [C92]), jedoch selten weiter reflektiert wird, aber gleichwohl interessante Hinweise auf Unterschiede zur Mathematik liefert: die Methoden der informatischen Modellierung. Gelegentlich wird die Informatik in diesem Zusammenhang auch als *die Wissenschaft von der Modellbildung* bezeichnet. Akzeptiert man diese Charakterisierung, so lassen sich die drei Masterideen als Fundament der Modellbildung auffassen (Abb. 4):

- Mit der *strukturierten Zerlegung* sind die Ideen verbunden, mit deren Hilfe man ein reales System analysiert und die modellrelevanten Eigenschaften ableitet.

- Das Modell wird anschließend auf der Basis einer Beschreibungs*sprache* präzisiert und öffnet sich so weiteren syntaktischen und vor allem semantischen Analysen und Transformationen.
- Der dynamische Aspekt von Modellen, die Möglichkeit, sie zu simulieren, wird durch die *Algorithmisierung* erfaßt. Die zugehörigen Ideen dienen dem Entwurf und dem Ablauf von Simulationsprogrammen, wobei Simulation hier im weitesten Sinne gemeint ist.

Die verschiedenen Formen der Modellierung in Mathematik und Informatik werden wir in Abschnitt 4.2 weiter vertiefen.

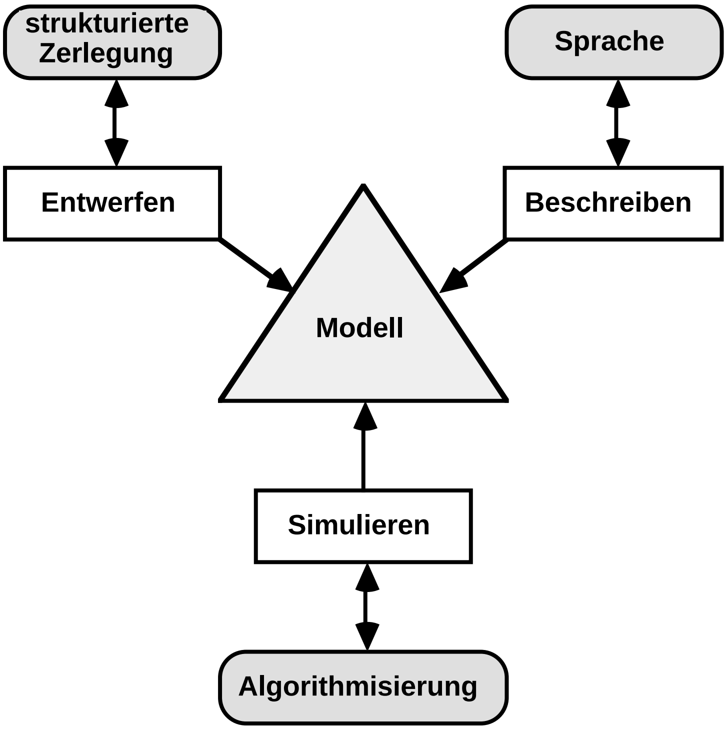

Abb. 4: Phasen der Modellbildung

4 Vergleich der Ideenbündel

Offenbar bestehen zwischen den beiden Ideenkollektionen von Mathematik und Informatik kaum Gemeinsamkeiten. Die einzigen in beiden Katalogen explizit auftretenden Ideen sind Algorithmisierung, Iteration und Reduktion, letztere jedoch in einer anderen Bedeutung. Hinzu kommt die Idee der Modellbildung, die in der Informatik allerdings nur implizit auftaucht, repräsentiert durch die drei Masterideen. Das gesamte mit der Zerlegung und der Sprache verbundene informatische Ideenspektrum wird von den Ideen der Mathematik nicht erfaßt.

In den folgenden Abschnitten wollen wir etwas genauer untersuchen, warum die Informatik und eine ihrer historischen Wurzeln, die Mathematik, nur noch wenige Gemeinsamkeiten besitzen, warum aber dennoch immer wieder versucht wird, Methoden der Mathematik und Methoden der Informatik zu identifizieren.

4.1 Objekt- und Metasprache

Auch wenn die beiden Ideenkataloge auf größere Unterschiede zwischen Mathematik und Informatik hindeuten, hat man dennoch intuitiv das Gefühl, viele der informatischen Ideen seien auch in der Mathematik von Bedeutung. Ursache für diesen Eindruck ist vermutlich eine Vermischung zweier unterschiedlicher Sprachniveaus, des metasprachlichen und des objektsprachlichen Niveaus, auf denen die vermeintlich gemeinsamen Ideen in Mathematik und Informatik verwendet werden.

Unbestreitbar kennt und nutzt die Mathematik schulisch wie wissenschaftlich (teilweise ausgiebig) informatische Ideen wie Algorithmisierung (z.B. beim Euklidischen Algorithmus), Rekursion (z.B. bei rekursiv definierten Folgen), Divide-and-Conquer (z.B. bei der Produktregel der Differentiation), Top-down Methode (z.B. beim Beweisen von Behauptungen durch eine Folge von Lemmata) usw. Alle diese Ideen existieren in der (Schul-)Mathematik jedoch nur auf einer metasprachlichen Ebene: Sie werden einfach in Gebrauch genommen, um Aussagen über mathematische Gegenstände zu gewinnen, im übrigen aber nicht weiter reflektiert, definiert, erforscht oder weiterentwickelt.
In der Informatik gehören diese Ideen stattdessen zur Objektsprache, d.h., sie werden selbst zum Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen und in der Folge begrifflich erschlossen, präzisiert, formalisiert; ihr Spektrum wird sichtbar gemacht, und sie werden unter verschiedenen Gesichtspunkten variiert, erforscht und weiterentwickelt.

Beispiele:

1) Algorithmisierung.
   Diese Idee wird zwar in der (Schul-)Mathematik in vielen Zusammenhängen wirksam, meist bleibt sie aber implizit (metasprachlich). Insbesondere wird der Algorithmusbegriff nicht präzisiert. So erfährt man im Vergleich zur Informatik nicht, daß Algorithmen notwendige und wünschenswerte Merkmale besitzen (z.B. Effektivität, Determiniertheit, Ein-/Ausgabe, Terminierung etc.), daß sie mit gewissen grundlegenden Kontrollstrukturen gebildet werden (z.B. im imperativen Fall mittels Schleife, Alternative, Zuweisung) oder daß man verschiedene Algorithmen bezgl. spezieller Kriterien miteinander vergleichen muß (z.B. bezgl. Komplexität, Strukturiertheit).
2) Teamarbeit.
   Natürlich kann man auch in der Mathematik im Team arbeiten. Aber für die Mathematik ist Teamarbeit kein Gegenstand, der objektsprachlich verankert ist und auf den sich

das wissenschaftliche Interesse richtet.

Anders in der Informatik: Teamarbeit ist hier Teil der informatischen Kultur; sie wird präzisiert, und eine Vielzahl von Ideen (vor allem im Zusammenhang mit der Idee der strukturierten Zerlegung) konzentriert sich auf Forschungen zur Wirksamkeit und Organisation von Teams u.a. unter folgenden Gesichtspunkten:

- Welche Teamstrukturen sind für die informatischen Belange besonders effizient? Sind es z.B. die hierarchischen oder die autonom vernetzten oder Teams, die sich um wenige Spezialisten gruppieren (Chef-Programmierer-Team)?
- Wie teilt man ein Problem am besten auf Untergruppen auf?
- Mit welchen Maßnahmen hält man die erforderliche Kommunikation zwischen den Teammitgliedern möglichst gering?
- Wie muß das Berichtswesen organisiert werden?
- Wie werden die verschiedenen Versionen verwaltet, die Untergruppen während der Projektlaufzeit erstellt haben?

Diese Beobachtungen belegen auch, warum das Fach Informatik für die Teamarbeit im Rahmen des Projektunterrichts besonders geeignet erscheint. Während in anderen Fächern Projektunterricht nur als Unterrichtsmethode fungiert und pädagogischen Zielen dient, aber keinen unmittelbaren Bezug zum Fach besitzt und daher leicht aufgesetzt wirken kann, ist er innerhalb der Informatik auch wissenschaftlich verankert. Daher bietet sich hier die einzigartige Möglichkeit, Projektarbeit als Lehr- *und* Wissenschaftsmethode organisch zu verbinden.

Diese Überlegung verquickt zwar - in unzulässiger Weise, wie R. Baumann [B90] meint - den pädagogischen (Kooperation, soziales Lernen) und den informatischen Projektbegriff (Leistungssteigerung). Beide Ziele lassen sich jedoch durch geeignete Strategien, wie geschickte Zusammenstellung von Modulteams sowie durch weitere organisatorische Maßnahmen, miteinander verknüpfen.

4.2 Modellbildung

Die Überlegungen in Abschnitt 3 weisen darauf hin, daß die Informatik viel von einer allgemeinen Modellbildungswissenschaft besitzt. Aber auch in der Mathematik (sowie in anderen Wissenschaften) werden im Rahmen von Anwendungen immer wieder die Modellbildungsaspekte betont (z.B. [G83,SH91]). Wir wollen im folgenden einige Unterschiede zwischen der Modellbildung in Mathematik und Informatik herausarbeiten.

Nach Apostel [A61] ist ein Modellbildungsprozeß durch eine Relation R(S,P,T,M) beschrieben, wobei ein *Subjekt* S zum *Zwecke* P (purpose) zu einem *Original* T (prototype) das *Modell* M entwirft (Abb. 5). Nach Stachowiak [S65] besteht zudem zwischen T und M stets eine *Verkürzungsrelation* in dem Sinne, daß M nicht alle, sondern nur die aus Sicht von S bezgl. P relevanten Eigenschaften von T erfaßt. Die Unterschiede mathematischer und informatischer Modellierung betreffen nun nicht nur die Methoden, die S verwendet, um M aus T zu erzeugen (vornehmlich im Ideenbereich Sprache und strukturierte Zerlegung), sondern auch die Originale, die Zwecke der Modellbildung und die Modelle selbst.

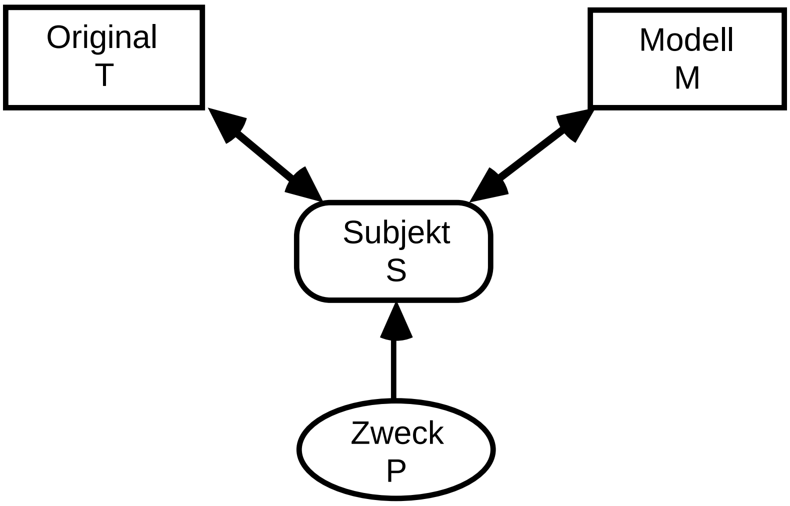

Abb. 5: Modellbildung

Die Originale T.

Die Originale mathematischer Modellierung sind überwiegend Teil der natürlichen Welt. Meist stehen sie in Zusammenhang mit Problemen geometrischen oder physikalischen Charakters. Die zugehörigen Sachverhalte besitzen eine relativ geringe Beschreibungskomplexität und beruhen auf (in der Schule) wenigen quantifizierbaren, kontinuierlich veränderlichen Daten, die funktional miteinander verbunden sind und gewisse Stetigkeitseigenschaften erfüllen.

Umgekehrt werden nur sehr wenige mathematische Problemstellungen in der Informatik wieder aufgegriffen und einer anderen/besseren Lösung zugeführt. Denn: Die Informatik modelliert meist Sachverhalte, die einer vom Menschen geschaffenen Welt entstammen (Bürovorgänge, Fahrzeugströme an Kreuzungen, Bibliothekssysteme). Damit fehlt ihnen eine „natürliche Einfachheit“. Vielmehr können diese Originale beliebig kompliziert sein, wobei die Kompliziertheit im wesentlichen auf menschlicher Willkür beruht und daher kaum reduktionistischen Regeln unterliegt. Zugleich sind die Originale durch diese Willkür in hohem Maße diskret und ihr Verhalten hochgradig unstetig. Selbst kleinste Veränderungen der Eingabe eines bekannten Ein-/Ausgabepaares lassen keine Rückschlüsse auf die Änderung der Ausgabe zu. Insbesondere sind die Bestandteile des Originals und ihr Verhalten nur selten zahlenmäßig zu erfassen. Tatsächlich spielen Zahlbereiche, speziell der Bereich der reellen Zahlen, in der Informatik nur eine geringe Rolle.

Die Zwecke P.
Die Mathematik versucht Eigenschaften und Verhalten ihrer Originale reduktionistisch zu modellieren. In hohem Maße idealisiert sie dabei gewisse Sachverhalte.
Die Informatik modelliert die reale durch eine künstliche Welt, die aber weitgehend realistisch bleibt und kaum idealisiert ist. Sie beschreibt ihre Originale nicht (nur auf Zwischenstufen des Modellbildungsprozesses), sondern bildet sie so nach, „wie sie sind" (z.B. Akten bleiben Akten, Karteikarten bleiben Karteikarten), besser: wie sie vom Menschen unmittelbar wahrgenommen werden (s.u.). Die Modelle erlangen so eine eigene (virtuelle) Realität und können in jeder Hinsicht an die Stelle ihrer Originale treten. Die nur geringen Möglichkeiten, die realen Objekte reduktionistisch im Modell darzustellen, stören hierbei nicht.

Die Modelle M.
Zwei zentrale Unterschiede seien beispielhaft hervorgehoben:
1) Elementarbausteine.
   Bereits die Elementarbausteine mathematischer und informatischer Modelle unterscheiden sich erheblich:
   - In der Mathematik sind es *Zahlen*, die sich als Resultat eines umfangreichen Abstraktionsprozesses vom Original ergeben und nur noch wenig mit ihm gemeinsam haben. Speziell läßt sich nur aus dem Zusammenhang entnehmen, welche Zahl jeweils welchen Bestandteil des Originals modelliert.
   - Die Bausteine informatischer Modelle sind *Objekte*, durch nur geringfügige Abstraktionsprozesse entstanden und im wesentlichen übereinstimmend mit ihren Originalen, so wie sie vom menschlichen Bewußtsein wahrgenommen und kognitiv erfaßt und verarbeitet werden.
     Hier scheint ein tiefer Zusammenhang zu bestehen zwischen den Modellen in der Informatik und - entsprechend gängiger kognitionspsychologischer Theorien - der menschlichen Wahrnehmung von Objekten, den Denkprozessen, der Repräsentation von Wissen sowie der Art und Weise, wie dieses Wissen menschliche Handlungen und Entscheidungen steuert [S94]. Alle diese Theorien zeigen, grob gesprochen, daß Wahrnehmungen objektorientiert systematisiert werden, wobei die Objekte mehr durch die mit ihnen möglichen Operationen als durch ihre äußeren Eigenschaften wie Farbe oder Form klassifiziert werden. [GHS79] und [A80] bezeichnen die zentralen Strukturkomponenten dieser systematisierenden kognitiven Prozesse als *Kategorien* bzw. *Schemata*, das sind komplexe Einheiten, die große Bereiche menschlichen Wissens und Verhaltens organisieren und weitgehend mit dem informatischen Begriff des Objekts übereinstimmen, wie er durch objektorientierte Programmiersprachen realisiert ist.
2) Zeit.
   Mathematische Modelle eliminieren die Zeit durch Quantelung. Dabei werden dyna-

mische Prozesse in Momentaufnahmen zerhackt, die anschließend statisch beschrieben werden. Die Zeit ist hierbei zwar noch ein Parameter, aber „sie vergeht nicht“. Vielmehr läßt sich der Zustand des modellierten Systems nur für jeden festen Zeitpunkt aus der Beschreibung ermitteln. Erst durch Berechnung aller Zustände für alle Zeitpunkte kann die Dynamik des Originals zurückgewonnen werden.
In der Informatik ist die Zeit stets Teil des Modells, sie wird nicht gequantelt, sondern sie „vergeht (als Eigenzeit des Modells) tatsächlich“, so daß dynamische Vorgänge auch im Modell dynamisch repräsentiert sind und nicht durch statische approximiert werden müssen.

Beispiel: Der freie Fall.
Die Mathematik modelliert das Verhalten eines fallenden Steins statisch durch Formeln, die für jeden Zeitpunkt t Geschwindigkeit, Position und kinetische Energie des Steins angeben:

$$v(t)=at,$$
$$s(t)={}^1/_2\,at^2,$$
$$E(t)={}^1/_2\,m(v(t))^2$$

Die Formeln liefern für konkrete Parameter jeweils Momentaufnahmen (Zustände des Steins). Der Stein selbst wird auf eine Zahl, seine Masse, reduziert.
In der künstlichen Welt, die ein informatisches Modell beschreibt, existiert eine Eigenzeit, und der Stein fällt „tatsächlich“ (virtuell). Der Stein selbst wird so modelliert, wie er in der Realität wahrgenommen wird, d.h. als Objekt (Kategorie, Schema), dem gewisse Eigenschaften und Operationsmöglichkeiten anhaften:

```
define Stein = object
        liegt auf ...;
        hat räumliche Ausdehnung;
        ist grau;
        ist schwer;
        ist hart;
        kann man werfen;
        kann man mit hämmern;
        ...
end.
```

G. Frey [F61] hat vor längerer Zeit versucht, Modelle zu klassifizieren. Er unterscheidet *ikonische* Modelle, die einen „anschaulich bildhaften Bezug auf das Abgebildete“ (das Original) haben und *symbolische* Modelle, die mit Hilfe einer formalen Sprache wohldefinierter Syntax und Semantik beschrieben werden.
Ikonische Modelle dienen vor allem zur Veranschaulichung von Sachverhalten, erklären sie aber meist nicht, weil sie keine Gesetzmäßigkeiten oder kausalen Zusammenhänge

erfassen.
Symbolische Modelle sind die allgemeinste Form von Modellen. Sie sind schwerer vorstellbar, liefern aber Erklärungen anstelle von Beschreibungen und ermöglichen daher auch Voraussagen über das zukünftige Verhalten des Originals.

Offenbar sind die Modelle der Mathematik im Endergebnis meist symbolisch (Formeln). Als illustrierende Zwischenstufen auf dem Weg zu einer symbolischen Darstellung treten auch ikonische Modelle (Funktionsgraphen, Zeichnungen) auf.

Die Informatik verwendet ebenfalls ikonische (Bäume, Graphen, Struktogramme) und symbolische Modelle (Programme, Grammatiken), allerdings nur als Zwischenschritte auf dem Weg zu einem Endergebnis, das weder ikonisch noch symbolisch genannt werden kann: die künstliche Welt, die der durch ein Programm gesteuerte Prozeß generiert. Diese Welt veranschaulicht keine Sachverhalte, sie erklärt sie nicht, und sie erfaßt keine Gesetzmäßigkeiten (wohl aber das dahinterstehende Programm), sie *ist* der Sachverhalt und damit „identisch“ zu ihrem Original.
Wir wollen hier in Fortsetzung der Überlegungen von Frey von *enaktiven* Modellen sprechen: Die Wirklichkeit wird durch Objekte modelliert, an denen man Handlungen vornehmen kann, und die selber aktiv werden und auf andere Objekte einwirken können, die folglich vom Menschen kognitiv erfaßt werden wie ihre Originale.

5 Schlußbemerkungen

Wir haben in diesem Aufsatz einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Mathematik und Informatik erarbeitet. Die Unterschiede überwiegen und bestehen vor allem hinsichtlich der fundamentalen Ideen der beiden Wissenschaften und der Form ihrer Modellbildung.
Dieser Vergleich spricht folglich nicht für eine Einbeziehung der Informatik in den Mathematikunterricht, einerseits weil sich die Ideen der Informatik den Ideen der Mathematik nicht so zuordnen lassen, daß eine Mitbehandlung informatischer Inhalte im aktuellen Mathematikunterricht den Schülern ein angemessenes Bild der Informatik vermittelt, andererseits weil die realen Sachverhalte, die die Informatik modelliert, sowie die Modellbildungsmethoden nur wenig gemeinsam haben. Gleichwohl können informatische Inhalte in den Mathematikunterricht einbezogen werden, was bereits durch eine Reihe interessanter Unterrichtsvorschläge belegt wurde, die aber (implizit) im wesentlichen nur fundamentale Ideen aus dem Bereich der Algorithmisierung behandeln und damit mindestens zwei Drittel der Informatik ausblenden; dies macht also einen regulären Informatikunterricht nicht überflüssig.

Literatur

[A80] Anderson, J.R.: „Cognitive psychology and its implications“, Freeman 1980

[A61] Apostel, L.: „Towards the formal study of models in the non-formal sciences“, in: The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences (H.Freudenthal,ed.) (1961) 1-37

[B90] Baumann, R.: „Didaktik der Informatik“, Klett 1990

[B80] Beck, U.: „Ziele des zukünftigen Informatikunterrichts sind Ziele des Mathematikunterrichts“, J. für Mathematikdidaktik 1 (1980) 189-197

[B60] Bruner, J.S.: „The process of education“, Cambridge Mass. 1960 (dt. Übers.: „Der Prozeß der Erziehung“, Berlin 1970)

[C77] Claus, V.: „Informatik an der Schule: Begründungen und allgemeinbildender Kern“, Schriftenreihe des IDM 15 (1977) 19-33

[C92] Coy, W. (ed.): „Sichtweisen der Informatik“, Vieweg 1992

[D84] Dörfler, W.: „Fundamentale Ideen der Informatik und Mathematikunterricht“, Symposium über Schulmathematik, Österr. Mathem. Gesellschaft, Didaktik Reihe Nr. 10 (1984) 19-40

[F76] Fischer, R.: „Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen“, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3 (1976) 185-192

[F61] Frey, G.: „Symbolische und ikonische Modelle“, in: The Concept and the Role of the Model in Mathematics an Natural and Social Sciences (H.Freudenthal,ed.) (1961) 89-97

[GHS79] Glass, A.L.; Holyoak, K.J.; Santa, J.L.: „Cognition“, Addison-Wesley 1979

[G83] Glatfeld, M. (ed.): „Anwendungsprobleme im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I“, Vieweg 1983

[G91] Gotlieb, C.C.: „Fashions and fundamentals in computer science education“, J. of Education and Computing 7 (1991) 97-103

[H81] Halmos, P.R.: „Does mathematics have elements?“, The Mathematical Intelligencer 3 (1981) 147-153

[H75] Heitele, D.: „An epistemological view on fundamental stochastic ideas“, Educational Studies in Mathematics 6 (1975) 187-205

[K81] Klika, M.: „Fundamentale Ideen der Analysis“, mathematica didactica 4 (1981) 1-31, Sonderheft

[K89] Knöß, P.: „Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht“, Deutscher Universitäts-Verlag 1989

[M80] Müller, M.W.: „Fundamentale Ideen der Numerischen Mathematik“, Beitr. zum Mathematikunterricht (1980) 238-245

[S83] Schreiber, A.: „Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken“, mathematica didactica 6 (1983) 65-76

[S82] Schweiger, F.: „Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Unterricht“, Beitr. zum Mathematikunterricht (1982) 103-111

[S93] Schwill, A.: „Fundamentale Ideen der Informatik“, Zentralbl. für Didaktik d. Mathematik (1993) 20-31

[S94] Schwill, A.: „Cognitive aspects of object-oriented programming“, Manuskript (1994)

[S65] Stachowiak, H.: „Gedanken zu einer allgemeinen Theorie der Modelle“, Studium Generale 18 (1965) 432-463

[SH91] Swetz, F.; Hartzler, J.S.: „Mathematical modelling in the secondary school curriculum“, National Council of Teachers of Mathematics 1991

[T79] Tietze, U.-P.: „Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie - Aspekte der Curriculumsentwicklung im MU der SII“, mathematica didactica 2 (1979) 137-163